MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA KONTRA HARMONIK

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

RAYNA AGNECIA NASUTION
10954007952

UIN SUSKA RIAU

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2013

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA KONTRA HARMONIK

RAYNA AGNECIA NASUTION
10954007952

Tanggal Sidang : 30 Oktober 2013
Periode Wisuda : Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik. Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan menggantikan rata-rata Aritmatik menjadi rata-rata kontra harmonik yang selanjutnya dinamakan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik. Selanjutnya untuk menentukan galat pemotongan dengan mensubstitusikan nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} ke dalam k_1, k_2, k_3, dan k_4 yang diekspansi dalam bentuk deret Taylor sampai orde-5 $O\ \square^5$. Hasil dari simulasi numerik menunjukkan perbandingan galat antara metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi, dengan memperhatikan galat yang dihasilkan pada contoh $y' = y$ dan $y' = -y$ metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann lebih unggul dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi, karena metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann mempunyai galat yang lebih kecil dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi.

Kata kunci : *Deret Taylor, galat pemotongan, metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, rata-rata kontra harmonik.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "**Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik**". Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar Sarjana (S1). Selanjutnya shalawat serta salam penulis sembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penerang jalan dan penunjuk jalan yang lurus bagi seluruh umat manusia.

Selanjutnya, dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama kali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada ayahanda (Parhimpunan Nasution) dan ibunda (Rayhanita Lubis) kedua orang yang kukasihi dan kusayangi semoga Allah SWT selalu merahmati ayah dan ibu, memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Yenita Morena, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku pembimbing sekaligus ketua sidang yang telah banyak mendukung, membantu, mengarahkan, membimbing dan mengajarkan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir dapat selesai.
6. Bapak M. Soleh, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir dapat selesai.

7. Ibu Ari Pani Desvina, M. Sc selaku penasehat akademik yang memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis selama berkuliah di jurusan Matematika.
8. Ibu dan Bapak dosen jurusan Matematika yang tidak pernah lelah memberikan ilmu kepada kami.
9. Sahabat-sahabatku (Mirna, Lyly, Nurfadli, Darmi, Iswanti, Deni dan Mukti) yang selalu memberi dukungan.
10. Teman-teman jurusan matematika angkatan 2009, kakak dan adik tingkat jurusan Matematika angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis sadar masih banyak kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 30 Oktober 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat berbentuk persamaan diferensial biasa orde satu linear dan persamaan diferensial biasa orde satu non linear. Persamaan diferensial biasa orde satu non linear adalah salah satu persamaan yang tidak bisa diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, sebagai alternatif penyelesaian digunakan perhitungan secara numerik.

Salah satu penyelesaian numerik yang sering digunakan untuk persamaan diferensial biasa orde satu adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk penyelesaian persamaan diferensial orde satu karena metode tersebut tidak membutuhkan perhitungan turunan. Selain itu metode Runge-Kutta orde empat memiliki nilai kesalahan (*error)* yang relatif kecil dibandingkan dengan metode Euler, Heun dan metode Runge-Kutta orde tiga. Secara umum bentuk Metode Runge-Kutta orde empat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 \tag{1.1}$$

Metode Runge-Kutta orde empat memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan parameter bebasnya diantaranya Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann(Lapidus (1971), Darmond (1996)).

Metode Runge-Kutta dapat dimodifikasi ke dalam beberapa bentuk berdasarkan variasi rata-rata diantaranya dengan rata-rata aritmatik (Yakub dkk, 1995), rata-rata geometri (Evans (1991), Roni (2011)), rata-rata harmonik (Sanugi dkk (1994), Ardianti (2011)), rata-rata heronian (Wazwaz (1994), Yakub dkk (1995)), rata-rata centroidal (Wazwaz, 1994), rata-rata akar kuadrat (Wazwaz, 1994) dan rata-rata kontra harmonik (Yakub dkk (1995), Ababneh dkk (2009), Supinah (2010)).

Selanjutnya modifikasi yang telah dilakukan oleh peneliti pada metode Runge-Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik diantaranya Ababneh dan Rozita (2009) memperkenalkan modifikasi metode Runge-Kutta orde tiga berdasarkan rata-rata kontra harmonik pada masalah Stiff, selanjutnya Yakub dan Evans (1995) melakukan modifikasi Runge-Kutta orde empat klasik berdasarkan rata-rata kontra harmonik. Selain itu, Supinah (2010) melakukan modifikasi metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik.

Berdasarkan latar belakang dan penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti mengenai modifikasi Runge-Kutta berdasarkan rata-rata kontra harmonik, maka penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian terhadap metode Runge-Kutta dengan judul ”Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Konta Harmonik”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah “Bagaimana menentukan bentuk modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik”.

1.3 Batasan Masalah

Penulis membatasi permasalahan dalam penulisan tugas akhir ini yaitu pada penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dan simulasi numerik menggunakan *matlab*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta Orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.
2. Menentukan simulasi numerik pada Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini disusun atas lima bab.

BAB I **Pendahuluan**

Pendahuluan menguraikan latar belakang pemilihan judul, tujuan penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, serta sistematika penulisan tugas akhir.

BAB II **Landasan Teori**

Landasan teori berisikan tentang teori-teori yang mendukung untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir .

BAB III **Metodologi Penelitian**

Bab ini berisi tentang metode-metode yang dilakukan untuk memperoleh hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV **Pembahasan**

Bab pembahasan berisi langkah-langkah dan hasil dari pembuktikan persamaan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik.

BAB V **Penutup**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini memuat penjelasan dasar teori yang mendukung penyelesaian tugas akhir, diantaranya yaitu: persamaan diferensial orde satu, deret Taylor, Runge-Kutta orde empat, galat pemotongan dan rata-rata kontra harmonik.

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial Biasa orde satu dibahas pada landasan teori ini karena hasil modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.

Definisi 2.1 (Richard Bronson, 2007) Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari turunannya. Suatu persamaan diferensial disebut sebagai suatu persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung turunan biasa, yaitu turunan dengan satu variabel bebas.

Ekspresi matematis $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots y^{(n)}$ sering digunakan untuk menuliskan masing-masing turunan pertama, kedua, ketiga, keempat,...., ke-*n* dari y terhadap variabel independen. Orde dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan, sedangkan derajat dalam sistem persamaan diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari orde turunan yang tertinggi. Jadi persamaan diferensial orde satu adalah persamaan yang hanya mengandung turunan pertama dari suatu fungsi yang tidak diketahui.

Berikut akan diberikan contoh persamaan diferensial berdasarkan orde dan derajatnya.

misalnya:

$\frac{dy}{dx} - y = x$ disebut persamaan diferensial biasa orde satu derajat satu

$\frac{1}{y}y' + 4x + 1 = 0$ disebut persamaan diferensial biasa orde satu derajat satu

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai berikut:

$y' = f\ x, y$ dengan $y\ x_0 = y_0$ dan y' ditulis sebagai $\frac{dy}{dx}$. (2.1)

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat diselesaikan dengan berbagai cara salah satunya adalah persamaan diferensial biasa orde satu linear.

Persamaan diferensial biasa orde satu linear memiliki bentuk

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (2.2)$$

Contoh 2.1

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial orde satu linear berikut:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \quad y(0) = 1.$$

Penyelesaian :

dari persamaan (2.2) terlihat bahwa $p(x) = \frac{1}{2}$ dan $q(x) = \frac{3}{2}$ adalah konstan. dengan faktor integrasi

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{2}dx} = e^{\frac{1}{2}x}$$

kalikan kedua sisi pada persamaan (2.2) dengan $I(x)$ sehingga diperoleh

$$e^{\frac{1}{2}x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

dan diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x}y\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

dengan mengintegralkan kedua ruas maka diperoleh

$$e^{\frac{1}{2}x}y = 3e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$y = 3 + Ce^{-\frac{1}{2}x}$$

Oleh karena $y(0) = 1$ maka:

$$y(0) = 3 + Ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0}$$

$$1 = 3 + C$$

$$C = -2$$

Sehingga solusi khususnya adalah :

$$y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 3$$

2.2 Metode Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

Jika f adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh persamaan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dapat diturunkan dari turunan pertamama hingga turunan ke-*n* sehingga diperoleh:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 \ldots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3 x + 3.4c_4 x^2 + \cdots + n.(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4 x + \cdots + n.(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(4)}(x) = 2.3.4c_4 + \cdots + n.(n-1)(n-2)(n-3)c_n x^{n-4} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = n!\,c_n + (n+1)!\,c_{n+1} x + (n+2)!\,c_{n+2} x^2 + \cdots$$

Selanjutnya perhatikan fungsi f sebagai deret pangkat dalam $(x-a)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ c_n(x-a)^n + \ldots \qquad (2.4)$$

Persamaan (2.4) diturunkan dari turunan pertama hingga turunan ke-*n* diperoleh:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$+ n.(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-a) + \cdots$$

$$+ n.(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(4)}(x) = 2.3.4c_4 + \cdots + n.(n-1)(n-2)(n-3)c_n(x-a)^{n-4} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = n!\,c_n + (n+1)!\,c_{n+1}(x-a) + (n+2)!\,c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots$$

dengan mensubtitusikan $x = a$ pada persamaan (2.4) serta pada turunannya sehingga didapatkan

$$c_0 = f(a),\quad c_1 = f'(a),\quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!},\quad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}$$

dengan bentuk umumnya

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.5}$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) bentuk deret pangkat dari f dalam $(x - a)$ dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{2.6}$$

Deret pada persamaan (2.6) disebut deret Taylor.

Teorema 2.1 (Louis, 1993) Misalkan f adalah suatu fungsi sehingga f dan turunan-turunan ke-*n* nya f', f'', ..., $f^{(n)}$ kontinu pada $[a,b]$, dan $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap *x* pada (a,b), maka terdapat suatu bilangan ξ pada (a,b).

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.7}$$

Bukti :

Misalkan F merupakan fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$, maka:

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - f''(x)\frac{(b-x)^2}{2!} - \cdots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) \tag{2.8}$$

Selanjutnya definisikan fungsi G dengan

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.9}$$

Turunkan fungsi pada persamaan (2.8) diperoleh:

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!} - \frac{f'''(x)(b-x)}{2!}$$

$$+ \cdots + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \frac{n f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n}}{n!} \qquad (2.10)$$

Sederhanakan fungsi F pada persamaan (2.10) diperoleh

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n}}{n!} \qquad (2.11)$$

Turunkan fungsi G pada persamaan (2.9) dan sederhanakan, maka hasilnya:

$$G'(x) = \frac{-(n+1)(b-x)^{n}}{(n+1)!} = \frac{-(b-x)^{n}}{n!} \qquad (2.12)$$

Fungsi F dan G kontinu pada $[a,b]$, dan dapat diturunkan pada (a,b) dan $G'(x) \neq 0$ untuk setiap x pada (a,b), sehingga fungsi F dan G memenuhi syarat teorema nilai rata-rata Cauchy (TNR Cauchy) dimana terdapat $\xi \in (a,b)$ sehingga

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$$

karena $F(b) = G(b) = 0$ maka diperoleh :

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} G(a) \qquad (2.13)$$

Selanjutnya dengan memisalkan $x = a$ pada persamaan (2.9) dan $x = \xi$ pada persamaan (2.11) dan (2.12). Subtitusikan persamaan (2.11), (2.9), dan (2.12) ke dalam persamaan (2.13) diperoleh bentuk

$$F(a) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^{n}}{\frac{1}{n!}(b-\xi)^{n}} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (2.14)$$

dengan memisalkan $x = a$ pada persamaan (2.8) diperoleh:

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} - \cdots$$
$$-f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} \qquad (2.15)$$

Substitusikan persamaan (2.14) ke dalam persamaan (2.15) maka diperoleh:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} - \cdots - f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

sehingga diperoleh bentuk

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}$$
$$+f^{(n+1)}(\xi)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2.16)$$

jika pada persamaan (2.16) b diganti dengan x maka diperoleh rumus Taylor yang berbentuk

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$+f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2.17)$$

dengan ξ diantara x dan a. ■

Fungsi f dan n turunan pertamanya kontinu pada selang tertutup yang memuat a dan x, dan turunan ke $(n+1)$ dari f ada disetiap titik pada selang terbuka yang berkaitan, maka persamaan (2.17) dapat ditulis

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (2.18)$$

dengan

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

$P_n(x)$ adalah polinomial Taylor berderajat n, dan $R_n(x)$ adalah sisa atau galat pemotongan.

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y' = f$$

untuk menghitung nilai hampiran y_{n+1} kita perlu mencari y', y'', $y^{(n)}$ dengan rumus

$$y^{(k)} = P^{(k-1)} f(x,y)$$

dengan P adalah operator turunan

$$P = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}$$

apabila turunan pada persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ dicari maka, akan diperoleh:

$$y'' = f_x + ff_y$$

$$y''' = f_{xx} + ff_{xy} + f_xf_y + ff_y{}^2 + ff_{yx} + f^2f_{yy}$$

$$= f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy} + f_xf_y + ff_y{}^2$$

$$y^{(4)} = f_{xxx} + 3f_xf_{xy} + 3f^2f_{xyy} + 3ff_{xxy} + 5ff_yf_{xy} + f^3f_{yyy} + fy^2(f_x + ff_y) + f_{xx}f_y + 4f^2f_yf_{yy} + 3ff_xf_{yy}$$

Deret Taylor hampiran y_{n+1} yang diekspansi disekitar y_n dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \frac{h^3}{3!}y_n^{(3)} + \cdots + \frac{h^n}{n!}y_n^{(n)} \qquad (2.19)$$

Subtitusikan persamaan (2.19) ke dalam turunan pada persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, maka deret taylornya dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy} + f_xf_y + ff_y{}^2) + \frac{h^4}{24}(f_{xxx} + 3f_xf_{xy} + 3f^2f_{xyy} + 3ff_{xxy} + 5ff_yf_{xy} + f^3f_{yyy} + f_y{}^2(f_x + ff_y) + f_{xx}f_y + 4f^2f_yf_{yy} + 3ff_xf_{yy}) + O(h^5) \qquad (2.20)$$

dengan hanya mengambil turunan terhadap y pada persamaan (2.20) diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}ff_y + \frac{h^3}{6}(f^2f_{yy} + ff_y{}^2) + \frac{h^4}{24}(f^3f_{yyy} + ff_y{}^3 + 4f^2f_yf_{yy}) \qquad (2.21)$$

2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Definisi 2.2 (Munir, 2008) Metode Rungge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-n ialah:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + \cdots + b_nk_n) \quad (2.22)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_1h, y_n + a_{11}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_2h, y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$$

$$\vdots$$

$$k_i = f(x_n + c_{n-1}h, y_r + a_{n-1,1}k_1 + a_{n-1,2}k_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}k_{i-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan *n* langkah dapat ditunjukkan ke dalam sebuah tabel. Tabel ini dikenal sebagai Tabel Butcher, berikut adalah bentuk umum Metode Runge-Kutta digambarkan dalam sebuah Tabel Butcher (Lambert,1993).

Tabel 2.1 Tabel Butcher Metode Runge-Kutta Orde-*n*

0	0	0	0	...	0
c_1	a_{11}	0	0	...	0
c_2	a_{21}	a_{22}	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
c_{n-1}	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,n-1}$	...	0
	b_1	b_2	b_{n-1}	...	b_n

Salah satu Metode Runge-Kutta yang sering digunakan adalah **metode Runge-Kutta orde empat**. Karena metode Runge-Kutta orde empat memiliki tingkat ketelitian solusinya tinggi dibandingkan metode Rungge-Kutta orde sebelumnya.

Metode Runge-Kutta orde empat berbentuk:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4\right) \tag{2.23}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + c_1h, y_n + a_{11}k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + c_2h, y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + c_3h, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3)$$

Persamaan Runge-Kutta di atas memiliki tiga belas konstanta. Untuk memperoleh nilai $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, adalah dengan cara menjabarkan k_1, k_2, k_3, dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya variabel *y* saja sehingga diperoleh:

$$k_1 = f \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(y_n + a_{11}k_1\right) \\ &= f + h a_{11} f f_y + \frac{h^2}{2} a_{11}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6} a_{11}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(y_n + a_{21}k_1 + a_{22}k_2\right) \\ &= f + h\left(a_{21} + a_{22}\right) f f_y + h^2\left(a_{11}a_{22} f f_y^2 + \frac{1}{2}\left(a_{21} + a_{22}\right)^2 f^2 f_{yy}\right) + \\ &\quad h^3\left(\frac{1}{2} a_{11}^2 a_{22} f^2 f_y f_{yy} + a_{11}(a_{21} + a_{22}) a_{22} f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}(a_{21} + a_{22})^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3) \\ &= f + h\left(a_{31} + a_{32} + a_{33}\right) f f_y + h^2\left(a_{11}a_{32} f f_y^2 + \left(a_{21} + a_{22}\right) a_{33} f f_y^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left(a_{31} + a_{32} + a_{33}\right)^2 f^2 f_{yy}\right) + h^3\left(\frac{1}{2} a_{11}^2 a_{32} f^2 f_y f_{yy} + \right. \\ &\quad a_{33} \frac{\left(a_{21} + a_{22}\right)^2}{2} f^2 f_y f_{yy} + \left(a_{31} + a_{32} + a_{33}\right)\left(a_{11}a_{32} + \right. \\ &\quad \left. a_{33}\left(a_{21} + a_{22}\right)\right) f^2 f_y f_{yy} + a_{33}a_{22}a_{11} f f_y^3 + \frac{1}{6}\left(a_{31} + a_{32} + \right. \\ &\quad \left.\left. a_{33}\right)^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.27}$$

Untuk mendapatkan nilai parameter $b_1, b_2, b_3, b_4, a_{11}, a_{21}$, $a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, adalah dengan cara menstubtitusikan persamaan (2.24), (2.25), (2.26), dan (2.27) ke dalam persamaan (2.23). Kemudian gunakan penyelesaian pendekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

$$b_2 a_{11} + b_3(a_{21} + a_{22}) + b_4 \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ = \frac{1}{2}$$

$$b_2 a_{11}^2 + b_3(a_{21} + a_{22})^2 + b_4 \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ ^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_2 a_{11}^3 + b_3(a_{21} + a_{22})^3 + b_4 \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ ^3 = \frac{1}{4}$$

$$b_3 a_{22} a_{11} + b_4 a_{32} a_{11} + b_4 a_{33}(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{6}$$

$$b_3 a_{22} a_{11}^2 + b_4 a_{32} a_{11}^2 + b_4 a_{33}(a_{21} + a_{22})^2 = \frac{1}{12}$$

$$b_3 a_{11} a_{22}(a_{21} + a_{22}) + b_4 \ a_{31} + a_{32} + a_{33} \ \ a_{11} a_{32} + a_{33}(a_{21} + a_{22}) \ = \frac{1}{8}$$

$$b_4 a_{33} a_{22} a_{11} = \frac{1}{24} \tag{2.28}$$

Beberapa bentuk metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan parameter bebas nya sebagai berikut:

a. Runge-Kutta Orde Empat Klasik

Persamaan (2.28) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter untuk mendapatkan bentuk Runge-Kutta orde empat klasik diambil 3 parameter bebas misalnya :

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1 \tag{2.29}$$

kemudian substitusikan 3 parameter pada persamaan (2.29) ke persamaan (2.28) sehingga diperoleh :

$$a_{11} = \frac{1}{2},\ a_{21} = 0,\ a_{31} = 0, a_{22} = \frac{1}{2},\ a_{32} = 0,\ a_{33} = 1, b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{1}{3},$$

$$b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{1}{6} \tag{2.30}$$

kemudian substitusikan parameter dari persamaan (2.29) dan (2.30) pada persamaan (2.23) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde-4 Klasik sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\ k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \tag{2.31}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Berdasarkan bentuk umum dari Tabel Butcher pada Tabel 2.1 Runge-Kutta orde-4 klasik dalam bentuk tabel Butcher adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Butcher metode Runge-Kutta Orde-4 Klasik

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

b. Runge-Kutta Orde Empat Kutta

Persamaan (2.28) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter untuk mendapatkan bentuk Runge-Kutta orde empat Kutta, diambil 3 parameter bebas misalnya :

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = 1 \tag{2.32}$$

kemudian substitusikan 3 parameter pada persamaan (2.32) ke persamaan (2.28) sehingga diperoleh

$$a_{11} = \frac{1}{3},\ a_{21} = -\frac{1}{3},\ a_{31} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{32} = -1,\ a_{33} = 1,\ b_1 = \frac{1}{8},$$

$$b_2 = \frac{3}{8}, b_3 = \frac{3}{8},\ \ b_4 = \frac{1}{8} \tag{2.33}$$

kemudian substitusikan parameter dari persamaan (2.32) dan (2.33) pada persamaan (2.23) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde-4 Kutta sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\square}{8}\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4 \tag{2.34}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}\square, y_n + \frac{k_1}{3})$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}\square, y_n - \frac{k_1}{3} + k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \square, y_n + k_1 - k_2 + k_3)$$

Berdasarkan bentuk umum dari Tabel Butcher pada Tabel 2.1 Runge-Kutta orde empat Kutta dalam bentuk tabel Butcher adalah sebagai berikut:

Tabel 2.3 Tabel Butcher Metode Runge-Kutta Orde-4 Kuta

0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0
2/3	− 1/3	1	0	0
1	1	− 1	1	0
	1/8	3/8	3/8	1/8

c. Runge-Kutta Orde Empat Gill

Persamaan (2.28) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter untuk mendapatkan bentuk Runge-Kutta orde empat Gill, diambil 3 parameter bebas misalnya :

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1 \tag{2.35}$$

kemudian substitusikan 3 parameter pada persamaan (2.35) ke persamaan (2.28) sehingga diperoleh :

$$a_{11} = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, a_{31} = 0, a_{22} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, a_{32} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, a_{33} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{6},\ b_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{6},\ b_4 = \frac{1}{6} \tag{2.36}$$

kemudian substitusikan parameter dari persamaan (2.35) dan (2.36) pada persamaan (2.23) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde empat Gill sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\ k_1 + \ 2 - \sqrt{2}\ k_2 + \ 2 + \sqrt{2}\ k_3 + k_4 \qquad (2.37)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} k_1 + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} k_2)$$

$$k_4 = f\ \ x_n + h, y_n + \frac{-\sqrt{2}}{2} k_2 + \ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ k_3$$

Berdasarkan bentuk umum dari Tabel Butcher pada Tabel 2.1 Runge-Kutta orde empat Gill dalam bentuk tabel Butcher adalah sebagai berikut:

Tabel 2.4 Tabel Butcher metode Runge-Kutta orde-4 Gill

0	0	0	0	0
$1/2$	$1/2$	0	0	0
$1/2$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0	0
1	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	$1/6$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{6}$	$1/6$

d. Runge-Kutta Orde empat Kuntzmann

Persamaan (2.28) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter untuk mendapatkan bentuk Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, diambil 3 parameter bebas misalnya:

$$c_1 = \frac{2}{5},\ c_2 = \frac{3}{5},\ c_3 = 1 \qquad (2.38)$$

kemudian substitusikan 3 parameter pada persamaan (2.38) ke persamaan (2.28) sehingga diperoleh :

$$a_{11} = \frac{2}{5},\quad a_{21} = \frac{-3}{20},\quad a_{31} = \frac{19}{44},\quad a_{22} = \frac{3}{4},\quad a_{32} = \frac{-15}{44},\quad a_{33} = \frac{40}{44}$$

$$b_1 = \frac{55}{360},\quad b_2 = \frac{125}{360},\quad b_3 = \frac{125}{360},\quad b_4 = \frac{55}{360} \tag{2.39}$$

Substitusikan parameter dari persamaan (2.38) dan (2.39) pada persamaan (2.28) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \tag{2.40}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\;\; x_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{2}{5}k_1$$

$$k_3 = f\;\; x_n + \frac{3}{5}h, y_n - \frac{3}{20}k_1 + \frac{3}{4}k_2$$

$$k_4 = f\;\; x_n + h, y_n + \frac{19}{44}k_1 - \frac{15}{44}k_2 + \frac{40}{44}k_3$$

Berdasarkan bentuk umum dari Tabel Butcher pada Tabel 2.1 Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann dalam bentuk tabel Butcher adalah sebagai berikut:

Tabel 2.5 Tabel Butcher metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann

0	0	0	0	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	0
$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{20}$	$\frac{3}{4}$	0	0
1	$\frac{19}{44}$	$\frac{-15}{44}$	$\frac{40}{44}$	0
	$\frac{55}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{125}{360}$	$\frac{55}{360}$

2.4 Galat Pemotongan

Galat pada metode numerik berarti selisih antara nilai hasil perhitungan analitik (nilai sejati) dengan nilai hasil perhitungan numerik (nilai hampiran). Dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\xi = a - \hat{a} \tag{2.41}$$

dengan

a adalah nilai sejati

$\hat{a}$ adalah nilai hampiran

ξ adalah galat

Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Galat pemotongan muncul karena banyaknya metode numerik yang diperoleh dengan hampiran fungsi menggunakan deret yang tak berhingga, maka untuk hampiran tersebut deret di potong/ hentikan sampai suku orde tertentu saja.

Aproksimasi pada polinomial di titik $n + 1$, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan menstubtitusikan sebuah derajat polinomial *p* + 1 kedalam rumus orde *p* dapat dibangun sebuah bentuk galat :

$$T(x, h) = C h^{p+1} y^{(p+1)}(\xi)$$

Proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h*. definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h)$$

maka dapat diperhatikan bahwa galat pemotongan dari metode runge-kutta untuk orde ke p adalah

$$T(x, h) = O(h^{p+1})$$

dengan O adalah konstanta, dan taksiran galat merupakan hasil tambahan dari perhitungan titik yang baru.

Selanjutnya untuk mendapatkan galat metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dilakukan dengan langkah-langkah yang sama dengan cara memperoleh nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} dalam menemukan rumusan metode Runge-Kutta orde empat yang telah dibahas dalam sub bab 2.3 sebelumnya.

Substitusikan nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} kedalam persamaan k_1, k_2, k_3, dan k_4 pada persamaan (2.23). Setelah nilai-nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 diperoleh pada persamaan (2.40), kemudian ekspansi kedalam deret Taylor hingga h^5. Selanjutnya selesaikan dengan prosedur yang sama pada persamaan (2.24-2.28) maka diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \; f {f_y}^2 + f^2 f_{yy} \; + \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy}$$
$$+ f f_y^3 \; + h^5 \; \frac{31}{3600} f^4 f_{yyyy} + \frac{103}{1800} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{1}{30} f^3 {f_{yy}}^2$$
$$+ \frac{91}{880} f^2 {f_y}^2 f_y \tag{2.42}$$

dengan deret Taylor

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \; f {f_y}^2 + f^2 f_{yy} \; + \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy}$$
$$+ f f_y^3 \; + h^5 \; \frac{f^4 f_{yyyy} + 7 f^3 f_{yy}^2 + 11 f^2 f_y^2 f_{yy} + f f_y^4}{120} \tag{2.43}$$

Selanjutnya dengan membandingkan hasil persamaan(2.42) dengan ekspansi Taylor pada persamaan (2.43) hingga h^5, sehingga diperoleh galat dari metode Runge-Kutta orde 4 Kuntzmann sebagai berikut :

$$\text{Galat} = h^5 \; \frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} - \frac{1}{900} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{1}{30} f^3 {f_{yy}}^2 + \frac{31}{2640} f^2 {f_y}^2 f_y$$
$$- \frac{1}{120} f {f_y}^4$$

atau

$$\text{Galat} = \frac{h^5}{39600} \; -44 f^3 f_y f_{yyy} + 465 f^2 {f_y}^2 f_{yy} + 11 f^4 f_{yyyy}$$
$$+ 1320 f^3 {f_{yy}}^2 - 330 f {f_y}^4 \tag{2.44}$$

2.5 Rata-rata Kontra Harmonik

Rata-rata kontra harmonik merupakan hasil kombinasi dari rata-rata Aritmatik dan Rata-rata Geometri.

Bila terdapat data $k_1, k_2, \dots\ k_n$ maka formula untuk rata-rata Aritmatik (AM) dan rata-rata Geometri (GM) adalah

$$AM = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n} \tag{2.45}$$

$$GM = \sqrt[n]{k_1 k_2 \dots k_n} \tag{2.46}$$

sehingga diperoleh persamaan untuk rata-rata Kontra Harmonik C_oM sebagai berikut:

$$C_oM = \frac{2\,AM^2 - GM^2}{AM} \tag{2.47}$$

bila terdapat $n = 2$ dengan k_1 dan k_2 maka formula untuk persamaan rata-rata aritmatik dan rata-rata geometri adalah:

$$AM = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$GM = \sqrt{k_1 k_2}$$

Penyelesaian untuk rata-rata kontra harmonik adalah sebagai berikut:

$$C_oM = \frac{2\,AM^2 - GM^2}{AM}$$

$$= \frac{2\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - k_1 k_2}{\frac{k_1 + k_2}{2}}$$

$$= \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} \tag{2.48}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian baik berasal dari buku-buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge Kutta orde-4 Kuntzmann yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{}{360} \; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \qquad (3.1)$$

2. Berdasarkan persamaan (3.1) dapat dibentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata aritmatik.
3. Kemudian substitusikan persamaan (2.48) $C_oM = \frac{{k_1}^2+{k_2}^2}{k_1+k_2}$ kedalam persamaan (3.1) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360} \; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4$ sehingga menghasilkan bentuk persamaan baru yang disebut sebagai Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Kontra Harmonik (RKKuC_OH).
4. Setelah didapat bentuk RKKuC_OH, kemudian menentukan nilai parameter dari RKKuC_OH dengan cara mengekspansi nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 ke dalam bentuk deret Taylor sehingga diperoleh nilai parameter yaitu $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$, dan a_{33} dengan menggunakan Maple 13.
5. Setelah didapat nilai parameter selanjutnya subtitusikan nilai parameter yang telah didapat ke dalam bentuk RKKuC_OH.
6. Melakukan simulasi numerik pada RKKuC_OH dengan menggunakan matlab 5,3 untuk memperoleh nilai galatnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

Bab IV ini akan membahas pembentukan parameter dari metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik. Selanjutnya akan di bentuk galat dari metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik. Setelah didapat bentuk dari Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik, selanjutnya menentukan nilai simulasi numerik untuk memperoleh perbandingan galat antara bentuk Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann dengan bentuk Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann yang telah dimodifikasi.

4.1 Metode Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata kontra Harmonik

Metode Runge-Kutta orde-4 telah banyak dimodifikasi, seperti modifikasi metode Runge-Kutta klasik berdasarkan rata-rata aritmatik, rata-rata centroidal, rata-rata akar kuadrat, rata-rata geometri, rata- rata harmonik, rata-rata heronian dan rata-rata kontra harmonik.

Perhatikan kembali bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360} \; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \tag{4.1}$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{180}\left(\frac{11k_1}{2} + \frac{25k_2}{2} + \frac{25k_3}{2} + \frac{11k_4}{2}\right)$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dapat dibentuk persamaan baru yang memuat unsur rata-rata aritmatik sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36} \; \frac{11 \; k_1 + k_2}{2} + \frac{11 \; k_2 + k_3}{2} + \frac{3 \; k_2 + k_3}{2} + \frac{11 \; k_3 + k_4}{2}$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36} \; \frac{11 \; k_1 + k_2}{2} + \frac{14 \; k_2 + k_3}{2} + \frac{11 \; k_3 + k_4}{2} \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) merupakan persamaan Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata aritmatik. Selanjutnya, bentuk aritmatika pada persamaan (4.2) digantikan dengan bentuk rata-rata kontra harmonik

$$C_oM = \frac{k_i^{\,2} + k_{i+1}^{\,2}}{k_i + k_{i+1}}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.3}$$

dengan mensubsitusikan bentuk rata-rata kontra harmonik pada persamaan (4.3) ke persamaan (4.1) sehingga diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\left(\frac{11\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)}{k_1 + k_2} + \frac{14\left(k_2^{\,2} + k_3^{\,2}\right)}{k_2 + k_3} + \frac{11\left(k_3^{\,2} + k_4^{\,2}\right)}{k_3 + k_4}\right) \tag{4.4}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{4.5a}$$

$$k_2 = f(x_n + c_1 h, y_n + a_{11}k_1 h) \tag{4.5b}$$

$$k_3 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}k_1 h + a_{22}k_2 h) \tag{4.5c}$$

$$k_4 = f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31}k_1 h + a_{32}k_2 h + a_{33}k_3 h) \tag{4.5d}$$

Persamaan (4.4) dikenal sebagai modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik.

Terlebih dahulu ditentukan nilai parameter dari $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$, dan a_{33} dengan menjabarkan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 kedalam bentuk deret Taylor sehingga diperoleh persamaan (2.24) sampai (2.27). Persamaan (2.24) sampai (2.27) akan disubtitusikan ke persamaan (4.4) dan untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial, maka persamaan (4.4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{pembilang}{penyebut} \tag{4.6}$$

dengan

$$pembilang = h/36\,\big(11\left(k_1^2 + k_2^2\right)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + 14\left(k_2^2 + k_3^2\right)(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) + 11\left(k_3^2 + k_4^2\right)(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)\big) \tag{4.7}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 pada persamaan (2.24) sampai (2.27) ke dalam persamaan (4.7) dan untuk penyederhanaan dipilih $A = a_{21} + a_{22}$ dan $a_{31} + a_{32} + a_{33} = B$ maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
pembilang = {} & 8hf^4 + h^2 f^4 f_y \quad \frac{47}{9}B + \frac{97}{9}a_{11} + \frac{97}{9}A \quad + h^3 f^4 {f_y}^2 \quad \frac{47}{9}a_{11}a_{32} \\
& \frac{47}{9}Aa_{33} + \frac{61}{18}AB + \frac{97}{9}a_{11}a_{22} + \frac{11}{9}B^2 + \frac{37}{6}{a_{11}}^2 + \frac{37}{6}A^2 \\
& \frac{119}{18}a_{11}B + 10Aa_{11} \quad + h^3 f^5 f_{yy} \quad \frac{47}{18}B^2 + \frac{97}{18}A^2 + \frac{97}{18}{a_{11}}^2 \\
& h^4 f^6 f_{yyy} \quad \frac{47}{54}B^3 + \frac{97}{54}A^3 + \frac{97}{54}{a_{11}}^3 \quad + h^4 f^5 f_y f_{yy} \quad 5a_{11}A^2 \\
& + \frac{47}{9}ABa_{33} + \frac{47}{9}a_{11}a_{32}B + \frac{97}{9}Aa_{11}a_{22} + \frac{47}{18}A^2a_{33} \\
& + \frac{47}{18}{a_{11}}^2a_{32} + \frac{97}{18}{a_{11}}^2a_{22} + \frac{61}{36}A^2B + \frac{61}{36}AB^2 + \frac{119}{36}{a_{11}}^2B \\
& + 5{a_{11}}^2A + \frac{119}{36}a_{11}B^2 + \frac{11}{9}B^3 + \frac{37}{6}A^3 + \frac{37}{6}{a_{11}}^3 \\
& + h^4 f^4 {f_y}^3 \quad 2a_{11}AB + \frac{22}{9}ABa_{33} + \frac{22}{9}a_{11}a_{32}B + \frac{47}{9}a_{11}a_{22}a_{33} \\
& + \frac{61}{18}Aa_{11}a_{32} + \frac{119}{18}Aa_{11}a_{33} + \frac{61}{18}a_{11}a_{22}B + \frac{37}{3}a_{11}a_{22}A \\
& + \frac{25}{18}{a_{11}}^3 + \frac{11}{18}AB^2 + \frac{11}{9}a_{11}B^2 + \frac{7}{9}A^2B + \frac{25}{18}A^3 + \frac{61}{18}{a_{11}}^2B \\
& \frac{61}{18}A^2a_{33} + \frac{119}{18}{a_{11}}^2a_{32} + 4A{a_{11}}^2 + 10{a_{11}}^2a_{22} + 4a_{11}A^2 \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

dan

$$penyebut = \quad k_1 + k_2 \quad k_2 + k_3 \quad k_3 + k_4 \qquad (4.9)$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan yang (2.24) -(2.27) ke dalam persamaan (4.9) maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
penyebut = {} & 8f^3 + hf^3 f_y \quad 8a_{11} + 8A + 4B \quad + h^2 f^3 {f_y}^2 \quad 8a_{11}a_{22} + 6a_{11}A \\
& + 2AB + 2A^2 + 4a_{11}a_{32} + 4Aa_{33} + 4a_{11}B + 2{a_{11}}^2 \quad +
\end{aligned}
$$

$$h^2 f^4 f_{yy} \;\; 4a_{11}{}^2 + 4A^2 + 2B^2 \;\; + h^3 f^5 f_{yyy} \;\; \frac{4}{3}a_{11}{}^3 + \frac{4}{3}A^3 + \frac{2}{3}B^3$$

$$+ h^3 f^4 f_y f_{yy} \;\; 2A^3 + 2a_{11}{}^3 + 4a_{11}a_{32}B + 4Aa_{33}B + 8a_{11}a_{22}A$$

$$+ 4a_{11}{}^2 a_{22} + 3a_{11}A^2 + 3a_{11}{}^2 A + + 2a_{11}{}^2 B + 2a_{11}B^2 + 2a_{11}{}^2 a_{32}$$

$$+ 2a_{33}A^2 + AB^2 + A^2B \;\; + h^3 f^3 f_y{}^3 \;\; a_{11}A^2 + 6a_{11}{}^2 a_{22} + a_{11}{}^2 A$$

$$+ 4a_{11}a_{22}A + 4a_{11}a_{33}A + 4a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{11}a_{22}B + 2a_{11}a_{32}A$$

$$+ a_{11}AB + 4a_{11}{}^2 a_{32} + a_{11}{}^2 B + 2a_{33}A^2 \qquad (4.10)$$

Perhatikan ekspansi Taylor y_{n+1} sampai h^4 berikut ini:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \;\; f^2 f_{yy} + f f_y{}^2 \;\; + \frac{h^4}{24} \;\; f^3 f_{yyy} + f f y^3$$

$$+ 4f^2 f_y f_{yy} \qquad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat ditulis dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + T \qquad (4.12)$$

dengan

$$T = hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \;\; f^2 f_{yy} + f f_y{}^2 \;\; + \frac{h^4}{24} \;\; f^3 f_{yyy} + f f y^3 + 4f^2 f_y f_{yy} \qquad (4.13)$$

Sehingga dari persamaan (4.6) dan (4.12) diperoleh

$$y_n + \frac{pembilang}{penyebut} = y_n + T$$

atau

$$pembilang = T \times penyebut \qquad (4.14)$$

dengan mensubtitusikan $penyebut$ dan T yang telah diperoleh pada persamaan (4.10) dan (4.13) maka diperoleh:

$$T * penyebut = 8hf^4 + h^2 f^4 f_y \;\; 4B + 8a_{11} + 8A + 4 \;\; + h^3 f^4 f_y{}^2 \;\; 2B + 4a_{11}B$$

$$+ 4a_{33}A + 2AB + 4a_{11} + 4A + 2a_{11}{}^2 + 4a_{11}a_{32} + 6a_{11}A$$

$$+ 8a_{11}a_{22} + 2A^2 + \frac{4}{3} \;\; + h^3 f^5 f_{yy} \;\; 2B^2 + 4A^2 + 4a_{11}{}^2 + \frac{4}{3}$$

$$+ h^4 f^5 f_y f_{yy} \left(\frac{4}{3}A + \frac{4}{3}a_{11} + \frac{2}{3}B + 2A^2 + 2{a_{11}}^2 + B^2\right.$$

$$+ 3a_{11}A^2 + 4a_{33}AB + 4a_{11}a_{32}B + 8a_{11}a_{22}A + 2a_{33}A^2$$

$$+ 2{a_{11}}^2 a_{32} + 4{a_{11}}^2 a_{22} + A^2B + AB^2 + 2{a_{11}}^2 B + 3{a_{11}}^2 A$$

$$\left.+ 2a_{11}B^2 + 2A^3 + 2{a_{11}}^3 + \frac{4}{3}\right) + h^4 f^6 f_{yyy}\left(\frac{4}{3}{a_{11}}^3 + \frac{4}{3}A^3\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{3}B^3 + \frac{1}{3}\right) + h^4 f^4 {f_y}^3 \left(AB + 2a_{33}A + 2a_{11}a_{32} + 2a_{11}B\right.$$

$$+ 3a_{11}A + 4a_{11}a_{22} + A^2 + a_{11}AB + 4a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{11}a_{32}A$$

$$+ 4a_{11}a_{33}A + 2a_{11}a_{22}B + 4a_{11}a_{22}A + \frac{2}{3}B + {a_{11}}^2 B + 2A^2a_{33}$$

$$+ 4{a_{11}}^2 a_{32} + {a_{11}}^2 A + 6{a_{11}}^2 a_{22} + {a_{11}}^2 A + a_{11}A^2 + \frac{4}{3}$$

$$\left.+ \frac{4}{3}A + {a_{11}}^2 + \frac{1}{3}\right) \tag{4.15}$$

Kemudian membandingkan koefisien-koefisien h^n dan dan membagi dengan f^3 pada persamaan (4.8) dengan persamaan (4.15) sehingga diperoleh :

$h^2 f f_y$: $\quad \frac{25}{9}a_{11} + \frac{25}{9}A + \frac{11}{9}B = 4$

$h^3 f^2 f_{yy}$: $\quad \frac{25}{18}{a_{11}}^2 + \frac{25}{18}A^2 + \frac{11}{18}B^2 = \frac{4}{3}$

$h^3 f {f_y}^2$: $\quad -4a_{11} - 4A + \frac{11}{9}a_{11}a_{32} + 4a_{11}A + \frac{25}{6}A^2 + \frac{25}{18}AB +$

$\quad \frac{25}{6}{a_{11}}^2 + \frac{25}{9}a_{11}a_{22} - 2B + \frac{11}{9}Aa_{33} + \frac{47}{18}a_{11}B + \frac{11}{9}B^2 = \frac{4}{3}$

$h^4 f^3 f_{yyy}$: $\quad \frac{25}{54}{a_{11}}^3 + \frac{25}{54}A^3 + \frac{11}{54}B^3 = \frac{1}{3}$

$^4 f^2 f_y f_{yy}$: $-\frac{4}{3}A - \frac{4}{3}a_{11} - \frac{2}{3}B - 2A^2 - 2{a_{11}}^2 - B^2 + \frac{11}{18}{a_{11}}^2 a_{32}$

$+ \frac{11}{18}a_{33}A^2 + \frac{25}{36}A^2B + \frac{25}{36}AB^2 + \frac{47}{36}{a_{11}}^2B + \frac{47}{36}a_{11}B^2$

$+ 2a_{11}A^2 + 2{a_{11}}^2A + \frac{11}{9}ABa_{33} + \frac{11}{9}Ba_{11}a_{32} + \frac{25}{9}Aa_{11}a_{22}$

$+ \frac{25}{18}{a_{11}}^2a_{22} + \frac{25}{6}A^3 + \frac{25}{6}{a_{11}}^3 + \frac{11}{9}B^3 = \frac{4}{3}$

$^4 f{f_y}^3$: $- AB - 2Aa_{33} - 2a_{11}a_{32} - 2Ba_{11} - 3a_{11}A - 4a_{11}a_{22}$

$- \frac{4}{3}a_{11} + \frac{11}{9}a_{11}a_{22}a_{33} + \frac{25}{18}Aa_{11}a_{32} + \frac{47}{18}a_{11}Aa_{33}$

$+ a_{11}AB + \frac{25}{18}a_{11}a_{22}B + \frac{25}{3}a_{11}a_{22}A + \frac{22}{9}ABa_{33}$

$+ \frac{22}{9}Ba_{11}a_{32} - {a_{11}}^2 + \frac{25}{18}{a_{11}}^3 + \frac{25}{18}A^3 - \frac{2}{3}B - A^2$

$+ \frac{43}{18}{a_{11}}^2B + \frac{25}{18}A^2a_{33} + \frac{47}{18}{a_{11}}^2a_{32} + 3{a_{11}}^2A + 4a_{11}^2a_{22}$

$+ 3a_{11}A^2 + \frac{11}{18}B^2A + \frac{11}{9}B^2 3a_{11} + \frac{7}{9}A^2B - \frac{4}{3}A = \frac{1}{3}$

Ambil nilai $A = 3/5$ dan $B = 1$ sehingga diperoleh :

$^2 f f_y$: $\frac{25}{9}a_{11} = \frac{10}{9}$

$^3 f^2 f_{yy}$: $\frac{25}{18}{a_{11}}^2 = \frac{2}{9}$

$^3 f{f_y}^2$: $\frac{91}{90}a_{11} + \frac{11}{9}a_{11}a_{32} + \frac{25}{6}{a_{11}}^2 + \frac{25}{9}a_{11}a_{22} + \frac{11}{15}a_{33} = \frac{98}{45}$

$^4 f^3 f_{yyy}$: $\frac{25}{54}{a_{11}}^3 = \frac{4}{135}$

$$h^4 f^2 f_y f_{yy}: \quad \frac{623}{900}a_{11} + \frac{91}{180}{a_{11}}^2 + \frac{11}{18}{a_{11}}^2 a_{32} + \frac{143}{150}a_{33} + \frac{11}{9}a_{11}a_{32}$$

$$+ \frac{5}{3}a_{11}a_{22} + \frac{25}{18}{a_{11}}^2 a_{22} + \frac{25}{6}{a_{11}}^3 = \frac{779}{450}$$

$$h^4 f {f_y}^3: \quad -\frac{502}{225}a_{11} + \frac{287}{90}{a_{11}}^2 + \frac{23}{30}a_{33} + \frac{25}{18}{a_{11}}^3 + \frac{23}{18}a_{11}a_{32}$$

$$+ \frac{43}{18}a_{11}a_{22} + \frac{47}{18}{a_{11}}^2 a_{32} + 4{a_{11}}^2 a_{22} + \frac{47}{30}a_{11}a_{33}$$

$$+ \frac{11}{9}a_{11}a_{22}a_{33} = \frac{136}{75} \qquad (4.16)$$

Kemudian substitusikan nilai $a_{11} = \frac{2}{5}$ ke dalam persamaan (4.16) sehingga akan didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\frac{10}{9}a_{22} + \frac{22}{45}a_{32} + \frac{11}{15}a_{33} = \frac{83}{75}$$

$$\frac{8}{9}a_{22} + \frac{44}{75}a_{32} + \frac{143}{150}a_{33} = \frac{83}{75}$$

$$\frac{359}{225}a_{22} + \frac{209}{225}a_{32} + \frac{209}{150}a_{33} + \frac{22}{45}a_{22}a_{33} = \frac{158}{75} \qquad (4.17)$$

Selanjutnya melakukan penyelesaian dengan mengeleminasi persamaan (4.17) sehingga diperoleh nilai parameter sebagai berikut:

$$a_{11} = \frac{2}{5}, \quad a_{21} = \frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{12694}, \quad a_{22} = \frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{12694}$$

$$a_{31} = -\frac{109}{110} - \frac{7}{440}\sqrt{12694}, \quad a_{32} = \frac{327}{110} + \frac{3}{88}\sqrt{12694} \quad \text{dan}$$

$$a_{33} = -\frac{54}{55} - \frac{1}{55}\sqrt{12694}$$

Substitusikan semua nilai parameter yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.4), sehingga diperoleh metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik yang ditulis :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\left(11\,\frac{{k_1}^2 + {k_2}^2}{k_1 + k_2} + 14\,\frac{{k_2}^2 + {k_3}^2}{k_2 + k_3} + 11\,\frac{{k_3}^2 + {k_4}^2}{k_3 + k_4}\right) \qquad (4.18)$$

dengan

$$k_1 = f\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{2}{5}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \left(\frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{12694}\right)k_1 h + \left(\frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{12694}\right)k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + \left(-\frac{109}{110} - \frac{7}{440}\sqrt{12694}\right)k_1 h + \left(\frac{327}{110} + \frac{3}{88}\sqrt{12694}\right)k_2 h + \left(-\frac{54}{55} - \frac{1}{55}\sqrt{12694}\right)k_3 h\right)$$

Persamaan (4.18) dikenal sebagai Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik.

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann Berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik

Galat metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik dapat diperoleh dengan langkah-langkah yang sama dalam menentukan persamaan RKKuC$_O$H. Substitusikan nilai parameter yang telah didapat kedalam persamaan (4.4) dan mengekspansinya sampai dengan Orde-5 $O(h^5)$, maka diperoleh galat metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik sebagai berikut :

dengan $pembilang$ yang diekspansi sampai Orde-5 $O(h^5)$

$$pembilang = h^5\left(\left(\frac{248986887}{17187500} - \frac{38207}{12890625}\sqrt{12694}\right)f^5 {f_y}^2 f_{yy} + \left(\frac{5806378}{1546875} + \frac{4531}{1546875}\sqrt{12694}\right)f^6 f_y f_{yyy} + \left(\frac{51432311}{103125000} - \frac{263551}{34375000}\sqrt{12694}\right)f^4 {f_y}^4 + \left(\frac{3611687}{2062500} - \frac{2269}{515625}\sqrt{12694}\right)f^6 {f_{yy}}^2 + \frac{1616}{5625}f^7 f_{yyyy}\right) \quad (4.19)$$

dengan deret Taylor

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \; f {f_y}^2 + f^2 f_{yy} \; + \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3$$

$$+ h^5 \; \frac{f^4 f_{yyyy} + 7f^3 f_{yy}^2 + 11 f^2 f_y^2 f_{yy} + f f_y^4}{120} \qquad (4.20)$$

dengan

$$T = hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} \; f {f_y}^2 + f^2 f_{yy} \; + \frac{h^4}{24} \; f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3 \; +$$

$$h^5 \; \frac{f^4 f_{yyyy} + 7f^3 f_{yy}^2 + 11 f^2 f_y^2 f_{yy} + f f_y^4}{120}$$

dan penyebut

$$penyebut = 8f^3 + 12hf^3 f_y + h^2 \quad \frac{5472}{625} + \frac{9}{6875}\sqrt{12694} \;\; f^3 {f_y}^2 + \frac{102}{25} f^4 f_{yy}$$

$$h^3 \;\; \frac{26}{25} f^5 f_{yyy} + \quad \frac{36}{34375}\sqrt{12694} + \frac{235968}{34375} \;\; f^4 f_y f_{yy}$$

$$+ \quad \frac{131104}{34375} - \frac{192}{34375}\sqrt{12694} \;\; f^3 {f_y}^3 \;\; + h^4 \;\; \frac{273}{1250} f^6 f_{yyyy}$$

$$+ \quad \frac{102274287}{17187500} - \frac{21744}{4296875}\sqrt{12694} \;\; f^4 {f_y}^2 f_{yy}$$

$$+ \quad \frac{381092}{171875} + \frac{793}{343750}\sqrt{12694} \;\; f^5 f_y f_{yyy}$$

$$+ \quad \frac{8049453}{8593750} - \frac{43419}{8593750}\sqrt{12694} \;\; f^3 {f_y}^4$$

$$+ \quad \frac{150801}{171875} - \frac{573}{171875}\sqrt{12694} \;\; f^5 {f_{yy}}^2 \qquad (4.21)$$

Sehingga diperoleh $T \times penyebut$ yang diekspansi sampai Orde-5 h^5

$$T \times penyebut = h^5 \quad \frac{735038861}{51562500} - \frac{37113}{8593750}\sqrt{12694} \;\; f^5 {f_y}^2 f_{yy}$$

$$+ \quad \frac{793}{343750}\sqrt{12694} + \frac{3819677}{1031250} \;\; f^6 f_y f_{yyy}$$

$$+ \quad \frac{62770867}{12890625} - \frac{32772}{4296875}\sqrt{12694} \;\; f^4 {f_y}^4$$

$$+ \quad \frac{267676}{171875} - \frac{573}{171875}\sqrt{12694} \;\; f^6 {f_{yy}}^2$$

$$+ \frac{1069}{3750} f^7 f_{yyyy} \qquad (4.22)$$

Langkah berikutnya melakukan penyederhanaan dengan cara membagikan $pembilang$ dan $T \times penyebut$ pada persamaan (4.19) dan persamaan (4.22) dengan $8f^3$. Sehingga diperoleh $pembilang$ dan $T \times penyebut$ baru sebagai berikut:

$$pembilang = h^5 \quad \frac{248986887}{137500000} - \frac{38207}{103125000}\sqrt{12694} \quad f^2 {f_y}^2 f_{yy}$$
$$+ \quad \frac{2903189}{6187500} + \frac{4531}{12375000}\sqrt{12694} \quad f^3 f_y f_{yyy}$$
$$+ \quad \frac{514323311}{825000000} - \frac{263351}{275000000}\sqrt{12694} \quad f {f_y}^4$$
$$+ \quad \frac{3611687}{16500000} - \frac{2269}{4125000}\sqrt{12694} \quad f^3 {f_{yy}}^2$$
$$+ \frac{202}{5625} f^4 f_{yyyy} \tag{4.23}$$

dan

$$T \times penyebut = h^5 \quad \frac{735038861}{412500000} - \frac{37113}{68750000}\sqrt{12694} \quad f^2 {f_y}^2 f_{yy}$$
$$+ \quad \frac{793}{2750000}\sqrt{12694} + \frac{3819677}{8250000} \quad f^3 f_y f_{yyy}$$
$$+ \quad \frac{62770867}{103125000} - \frac{8193}{8593750}\sqrt{12694} \quad f {f_y}^4$$
$$+ \quad \frac{66919}{343750} - \frac{537}{1375000}\sqrt{12694} \quad f^3 {f_{yy}}^2$$
$$+ \frac{1069}{30000} f^4 f_{yyyy} \tag{4.24}$$

Selanjutnya dengan membandingkan hasil persamaan (4.23) dan (4.24) pada orde-5 h^5 maka diperoleh galat metode RKKuCoH sebagai berikut:

$$galat = \frac{h^5}{9000000} \quad 1524\sqrt{12694} + 260112 \quad f^2 {f_y}^2 f_{yy} + \quad 700\sqrt{12694}$$
$$+ 55900 \quad f^3 f_y f_{yyy} + \quad 217950 - 1200\sqrt{12694} \quad f^3 {f_{yy}}^2$$
$$+ \quad 132615 - 45\sqrt{12694} \quad f {f_y}^4 + 2500 f^4 f_{yyyy}$$

4.3 Simulasi Numerik

Hasil dari komputasi numerik diperoleh dengan membandingkan antara metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu) dengan bentuk Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi yang diterapkan dalam contoh persamaan diferensial berikut :

Contoh 4.1

$$y' = y \qquad y(0) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.25}$$

Solusi eksak yang diberikan adalah $Y = e^x$ dengan $n = 10$.

Tentukan penyelesaian persamaan (4.25) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann (RKKu), metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann dengan kontra harmonik (RKKuC_OH), Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann Geometri (RKKuG) dan Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann Harmonik (RKKuH).

Penyelesaian :

Persamaan (4.25) diselesaikan dengan matlab 5.3 dengan metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu), RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH dengan $h = 0.1$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak, solusi numerik serta nilai *error* dari RKKuCoH dapat dilihat pada Tabel (4.1) sedangkan nilai perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKUCoH, RKKuG dan RKKuH dari persamaan (4.25) dapat dilihat pada Tabel (4.2).

Tabel 4.1 Solusi Eksak, Solusi Numerik dan *Error* dari Metode RKKuCoH untuk Persamaan $y' = y$

i	x	Solusi Eksak	Solusi Numerik	*Error* RKKuCoH
1	0,1	1,105170918	1,105171023	1,045374710E-07
2	0,2	1,221402758	1,221402989	2,310635570E-07
3	0,3	1,349858808	1,349859191	3,830471040E-07
4	0,4	1,491824698	1,491825262	5,644433860E-07
5	0,5	1,648721271	1,648722050	7,797580550E-07

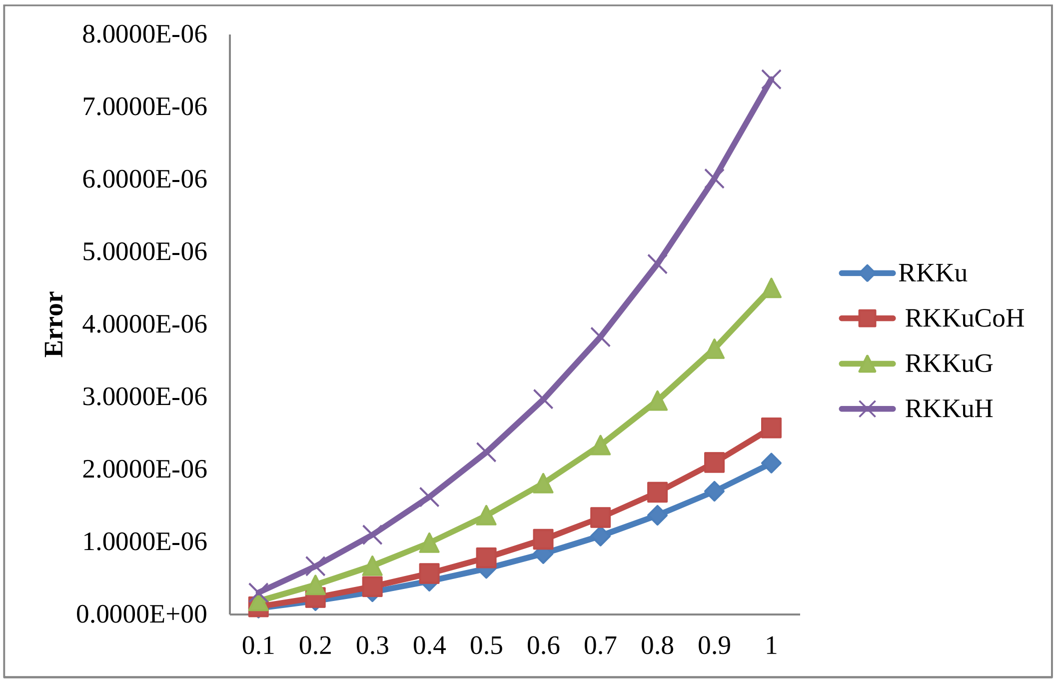
6	0,6	1,822118800	1,822119835	1,034119160E-06
7	0,7	2,013754041	2,013754041	1,333358222E-06
8	0,8	2,225542613	2,225542613	1,684101485E-06
9	0,9	2,459605205	2,459605205	2,093872582E-06
10	1,0	2,718281828	2,718284400	2,571207992E-06

Berdasarkan Tabel 4.1 diperoleh solusi numerik dari metode RKKuCoH mendekati solusi eksak terlihat dari nilai e*rror* yang kecil.

Tabel 4.2 Perbandingan *Error* dari Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH untuk Persamaan $y' = y$

i	x	*Error*			
		RKKu	RKKuCoH	RKKuG	RKKuH
1	0,1	8,4742E-08	1,0454E-07	1,8291E-07	3,0000E-07
2	0,2	1,8731E-07	2,3106E-07	4,0430E-07	6,6311E-07
3	0,3	3,1051E-07	3,8305E-07	6,7023E-07	1,0993E-06
4	0,4	4,5756E-07	5,6444E-07	9,8763E-07	1,6198E-06
5	0,5	6,3210E-07	7,7976E-07	1,3644E-06	2,2378E-06
6	0,6	8,3830E-07	1,0341E-06	1,8094E-06	2,9677E-06
7	0,7	1,0809E-06	1,3334E-06	2,3330E-06	3,8265E-06
8	0,8	1,3652E-06	1,6841E-06	2,9467E-06	4,8330E-06
9	0,9	1,6974E-06	2,0939E-06	3,6637E-06	6,0090E-06
10	1,0	2,0843E-06	2,5712E-06	4,4989E-06	7,3789E-06

Berdasarkan Tabel 4.2 diperoleh perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH yang dijelaskan dalam bentuk grafik pada Gambar 4.1



Gambar 4.1 Grafik Perbandingan *Error* pada Contoh 4.1

Berdasarkan grafik hasil plotting untuk penyelesaian contoh $y' = y$ terlihat bahwa modifikasi metode RK-4 Kuntzmann (RKKu) memiliki keakuratan yang lebih baik bila dibandingkan dengan RK-4 dengan metode RKKuC_OH, RKKuG dan RKKuH, dan setelah dilakukan modifikasi terlihat bahwa metode RKKuCoH memiliki galat yang lebih kecil dibandingkan RKKuG dan RKKuH

Contoh 4.2

$$y' = y \qquad\qquad y(0) = 1 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad\qquad (4.26)$$

Solusi eksak yang diberikan adalah $Y = e^x$ dengan $n = 10$.

Tentukan penyelesaian persamaan (4.26) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 Klasik Kontra Harmonik (RKKlCoH), metode Runge-Kutta orde-4 Kutta kontra harmonik (RKKCoH) dan Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann Kontra Harmonik (RKKuCoH) .

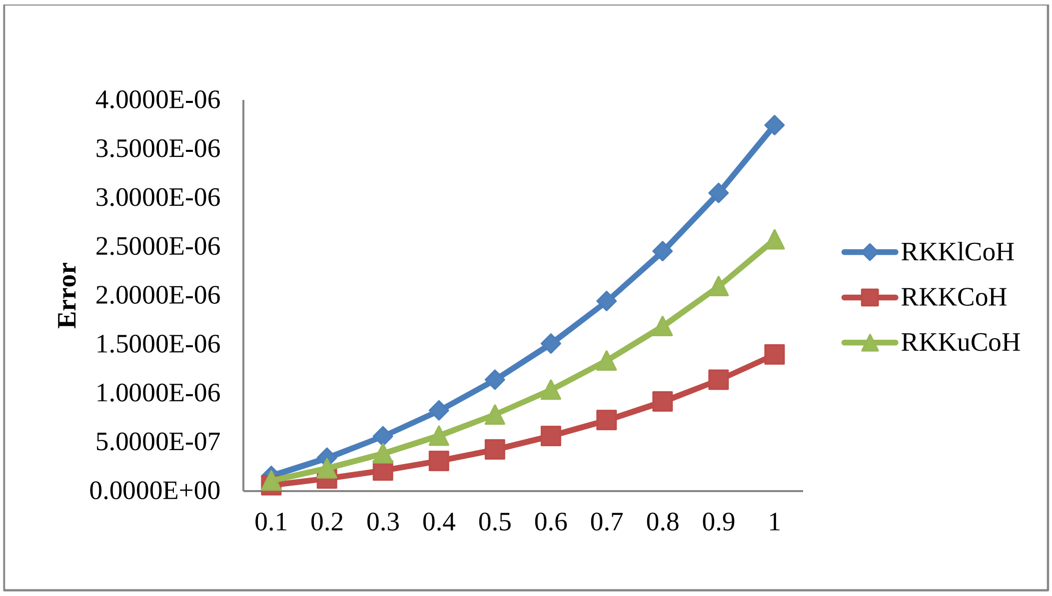
Penyelesaian :

Persamaan (4.26) diselesaikan dengan matlab 5.3 dengan metode (RKKlCoH), (RKKCoH) dan (RKKuCoH) dengan $h = 0.1$, dan $y_0 = 1$. Solusi eksak dan *Error* dari persamaan (4.26) dapat dilihat pada Tabel (4.3)

Tabel 4.3 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKlCoH, RKKCoH, dan RKKCoH untuk Persamaan $y' = y$

i	x	Solusi Eksak	*Error*		
			RKKlCoH	RKKCoH	RKKuCoH
1	0,1	1,1052	1,5213E-07	5,6659E-08	1,0454E-07
2	0,2	1,2214	3,3627E-07	1,2524E-07	2,3106E-07
3	0,3	1,3499	5,5745E-07	2,0761E-07	3,8305E-07
4	0,4	1,4918	8,2143E-07	3,0593E-07	5,6444E-07
5	0,5	1,6487	1,1348E-06	4,2263E-07	7,7976E-07
6	0,6	1,8221	1,5049E-06	5,6049E-07	1,0341E-06
7	0,7	2,0138	1,9404E-06	7,2268E-07	1,3334E-06
8	0,8	2,2255	2,4509E-06	9,1278E-07	1,6841E-06
9	0,9	2,4596	3,0472E-06	1,1349E-06	2,0939E-06
10	1,0	2,7183	3,7419E-06	1,3936E-06	2,5712E-06

Berdasarkan Tabel 4.3 diperoleh perbandingan *error* dari metode RKKlCoH, RKKCoH dan RKKuCoH yang dijelaskan dalam bentuk grafik pada Gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik Perbandingan *Error* pada Contoh 4.2

Berdasarkan grafik hasil plotting pada contoh 4.2 untuk penyelesaian contoh $y' = y$ metode yang paling baik adalah menggunakan RKKCoH karena memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan RKKuC$_O$H dan RKKCoH, sedangkan metode RKKuCoH memiliki *Error* yang lebih kecil dibandingkan dengan RKKlCoH.

Contoh 4.3

$$y' = \frac{1}{y} \qquad y(0) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad (4.27)$$

Solusi eksak yang diberikan adalah $\sqrt{2x+1}$ dengan $n = 10$. Tentukan penyelesaian persamaan (4.27) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann (RKKu), Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann dengan rata-rata kontra harmonik (RKKuC$_O$H), rata-rata Geometri (RKKuG) dan harmonik (RKKuH).

Penyelesaian :

Persamaan (4.27) diselesaikan dengan matlab 5.3 pada metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu), RKKuCoH, RKKuG, dan RKKuH. dengan $h = 0.1$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak, solusi numerik serta nilai *error* dari RKKuCoH dapat dilihat pada Tabel (4.4) sedangkan nilai perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKUCoH, RKKuG dan RKKuH dari persamaan (4.27) dapat dilihat pada Tabel (4.5).

Tabel 4.4 Solusi Eksak, Solusi Numerik dan *Error* dari Metode RKKuCoH untuk Persamaan $y' = \frac{1}{y}$

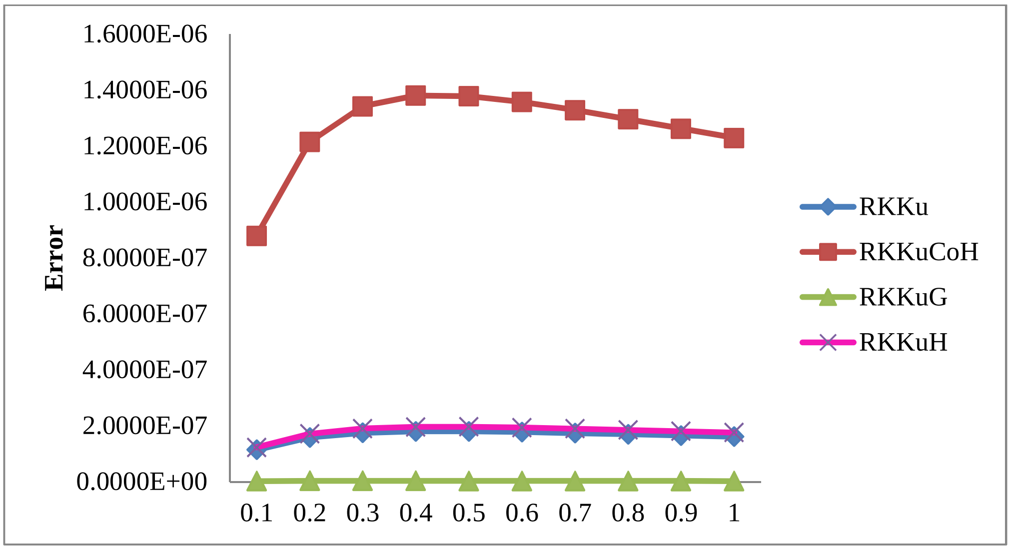
i	x	Solusi Eksak	Solusi RKKuCoH	*Error* RKKuCoH
1	0,1	1,095445115	1,095445994	8,789927890E-07
2	0,2	1,183215957	1,183217172	1,214886801E-06
3	0,3	1,264911064	1,264912406	1,342149531E-06
4	0,4	1,341640786	1,341642167	1,380443954E-06
5	0,5	1,414213562	1,414214941	1,378379921E-06
6	0,6	1,483239697	1,483241055	1,357578901E-06
7	0,7	1,549193338	1,549194667	1,328301396E-06
8	0,8	1,612451550	1,612452845	1,295635637E-06
9	0,9	1,673320053	1,673321315	1,262168633E-06
10	1,0	1,732050808	1,732052037	1,229220683E-06

Berdasarkan Tabel 4.4 diperoleh solusi numerik dari metode RKKuCoH mendekati solusi eksak terlihat dari nilai *error* yang kecil.

Tabel 4.5 Perbandingan *Error* dari Metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH untuk Persamaan $y' = 1/y$

i	x	*Error*			
		RKKu	RKKuCoH	RKKuG	RKKuH
1	0,1	1,1391E-07	8,7899E-07	2,3281E-09	1,2287E-07
2	0,2	1,5792E-07	1,2149E-06	2,9231E-09	1,7107E-07
3	0,3	1,7481E-07	1,3421E-06	3,0135E-09	1,8990E-07
4	0,4	1,8004E-07	1,3804E-06	2,9471E-09	1,9596E-07
5	0,5	1,7994E-07	1,3784E-06	2,8349E-09	1,9612E-07
6	0,6	1,7735E-07	1,3576E-06	2,7151E-09	1,9348E-07
7	0,7	1,7361E-07	1,3283E-06	2,6005E-09	1,8954E-07
8	0,8	1,6940E-07	1,2956E-06	2,4952E-09	1,8505E-07
9	0,9	1,6508E-07	1,2622E-06	2,3997E-09	1,8040E-07
10	1,0	1,6080E-07	1,2292E-06	2,3134E-09	1,7579E-07

Berdasarkan Tabel 4.5 diperoleh perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH yang dijelaskan dalam bentuk grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.3



Gambar 4.3 Grafik Perbandingan *Error* pada Contoh 4.3

Berdasarkan grafik hasil plotting untuk penyelesaian contoh 4.3 terlihat bahwa modifikasi metode RKKuG memiliki keakuratan yang lebih baik bila dibandingkan denganmetode RKKu , RKKuH dan RKKuC$_O$H.

Contoh 4.4

$$y' = -y \qquad\qquad y\ 0\ = 1 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad\qquad (4.28)$$

Solusi eksak yang diberikan adalah $y(x) = \sqrt{2x + 1}$ dengan $n = 10$. Tentukan penyelesaian persamaan (4.28) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 Kuntzmann (RKKu), RK-4 Kuntzmann dengan rata-rata kontra harmonik (RKKuC_OH), rata-rata geometri (RKKuG) dan rata-rata harmonik (RKKuH).

Penyelesaian :

Persamaan (4.28) diselesaikan dengan matlab 5.3 pada metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG, dan RKKuH dengan $\square = 0.1$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak, solusi numerik serta nilai *error* dari RKKuCoH dapat dilihat pada Tabel (4.6) sedangkan nilai perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKUCoH, RKKuG dan RKKuH dari persamaan (4.28) dapat dilihat pada Tabel (4.7).

Tabel 4.6 Solusi Eksak, Solusi Numerik dan *Error* dari Metode RKKuCoH untuk Persamaan $y' = -y$

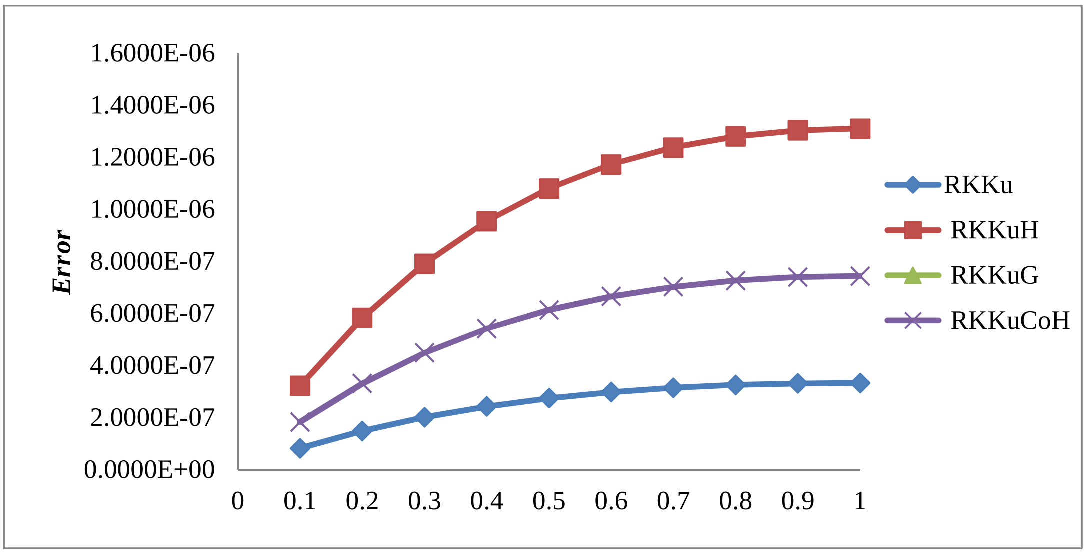
i	x	Nilai Eksak	Solusi RKKuCoH	*Error* RKKuCoH
1	0,1	0,904837418	0,904837235	1,829284830E-07
2	0,2	0,818730753	0,818730422	3,310410390E-07
3	0,3	0,740818221	0,740817771	4,493074330E-07
4	0,4	0,670320046	0,670319504	5,420668490E-07
5	0,5	0,606530660	0,606530047	6,131028980E-07
6	0,6	0,548811636	0,548810970	6,657100640E-07
7	0,7	0,496585304	0,496584601	7,027525340E-07
8	0,8	0,449328964	0,449328237	7,267162560E-07
9	0,9	0,406569660	0,406568920	7,397549940E-07
10	1,0	0,367879441	0,367878697	7,437310340E-07

Berdasarkan Tabel 4.6 diperoleh solusi numerik dari metode RKKuCoH mendekati solusi eksak terlihat dari nilai e*rror* yang kecil.

Tabel 4.7 Perbandingan *Error* dari Metode RKKu, RKKCoH, RKKuG dan RKKuH untuk Persamaan $y' = -y$

i	x	Error			
		RKKu	RKKuCoH	RKKuH	RKKuG
1	0,1	8,19640E-08	1,8293E-07	3,2231E-07	0,1903
2	0,2	1,48328E-07	3,3104E-07	5,8328E-07	0,3806
3	0,3	2,01319E-07	4,4931E-07	7,9166E-07	0,5727
4	0,4	2,42882E-07	5,4207E-07	9,5510E-07	0,7682
5	0,5	2,74711E-07	6,1310E-07	1,0803E-06	0,9689
6	0,6	2,98282E-07	6,6571E-07	1,1730E-06	1,1765
7	0,7	3,14880E-07	7,0275E-07	1,2382E-06	1,3929
8	0,8	3,25617E-07	7,2672E-07	1,2805E-06	1,6200
9	0,9	3,31459E-07	7,3975E-07	1,3034E-06	1,8597
10	1,0	3,33241E-07	7,4373E-07	1,3104E-06	2,1140

Berdasarkan Tabel 4.7 diperoleh perbandingan *error* dari metode RKKu, RKKuCoH, RKKuH dan RKKuG yang dijelaskan dalam bentuk grafik pada Gambar 4.4



Gambar 4.4 Grafik Perbandingan *Error* pada Contoh 4.4

Berdasarkan grafik hasil plotting untuk penyelesaian contoh 4.4 terlihat bahwa modifikasi metode RKKu memiliki keakuratan yang lebih baik bila dibandingkan dengan metode RKKuH, RKKuC_OH dan RKKuG. Sedangkan metode RKKuCoH memiliki nilai *error* yang lebih baik dibandingkan metode RKKuH dan RKKuG.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dijabarkan pada bab-bab sebelumnya, telah dijelaskan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik (RKKuCoH). Dalam penyelesaian metode RKKuCoH untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial dilakukan pemisahan persamaan penyebut dan persamaan pembilang. Kemudian hasil yang diperoleh dibandingkan dengan ekspansi Taylor sampai h^4 dengan membandingkan koefisien-koefisien h^k, sehingga diperoleh beberapa persamaan-persamaan. Dari persamaan tersebut diperoleh nilai-nilai parameter $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33}. Metode Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\ 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4$$

Setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata kontra harmonik didapatkan bentuk modifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik (RKKuCoH) sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36}\ \frac{11\ k_1{}^2 + k_2{}^2}{k_1 + k_2} + \frac{14\ k_2{}^2 + k_3{}^2}{k_2 + k_3} + \frac{11\ k_3{}^2 + k_4{}^2}{k_3 + k_4}$$

dengan

$$k_1 = f\ x_n, y_n$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{2}{5}k_1 h)$$

$$k_3 = f x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{12694}\ \ k_1 h$$
$$+ \frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{12694}\ \ k_2 h$$

$$k_4 = f\ \ x_n + h, y_n + \ -\frac{109}{110} - \frac{7}{440}\sqrt{12694}\ \ k_1 h$$
$$+ \frac{327}{110} + \frac{3}{88}\sqrt{12694}\ \ k_2 h + \ -\frac{54}{55} - \frac{1}{55}\sqrt{12694}\ \ k_3 h$$

Serta galat dari RKKuCoH adalah

$$galat = \frac{\square^5}{9000000} \quad 1524\sqrt{12694} + 260112 \; f^2 {f_y}^2 f_{yy} + \quad 700\sqrt{12694}$$

$$+ 55900 \; f^3 f_y f_{yyy} + \quad 217950 - 1200\sqrt{12694} \; f^3 {f_{yy}}^2$$

$$+ \; 132615 - 45\sqrt{12694} \; f {f_y}^4 + 2500 f^4 f_{yyyy}$$

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik menunjukkan perbandingan galat antara metode RKKu, RKKuCoH, RKKuG dan RKKuH. Perbandingan galat dilakukan dari beberapa contoh, pada contoh 4.1 dan 4.4 terlihat bahwa galat dari metode RKKu lebih baik dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde empat yang telah dimodifikasi, sedangkan metode RKKuCoH memiliki galat yang lebih kecil dibandingkan metode RKKuG dan RKKuH. Pada contoh 4.3 terlihat bahwa metode RKKuG memiliki nilai galat yang lebih kecil dibandingkan metode RKKu, RKKuCoH dan RKKuH.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya membahas modifikasi metode Runge Kutta orde-4 Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik, dan pada simulasinya hanya membandingkan empat metode. Sedangkan metode Runge Kutta orde empat Kuntzmann dapat dimodifikasi menggunakan variasi rata-rata yang lain. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat menemukan bentuk baru dengan menggunakan variasi rata-rata yang berbeda seperti rata-rata heronian, rata-rata centroidal dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk *"New Third Order Runge-Kutta Based on Contraharmonic mean for Stiff Problems"*, Vol. 3 no. 8, Halaman 365-376. School of Mathematical Sciences Universiti Kebangsaan Malaysia. 2009.

Ardianti, E. P. "Modifikasi Metode Runge-Kutta orde Empat (Kutta) Berdasarkan Rata-rata Harmonik". *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2011.

Ayres, F dan Ault J.C. *Persamaan diferensial. Erlangga*. Jakarta. 2007.

Bronson, R dan Costa, G. *Persamaan Differensial* . edisi tiga. Erlangga. Jakarta. 2007.

Dormand, J. R. *"Numerical Methods for Differential Equations"*. CRC Boca Raton. New York. 2000.

Evans, D. J. dan Yaakub, A.R. "A Fourth Order Runge-Kutta RK(4,4) Method With Error Control". *Intern J. Computer Math*.Vol. 71. Halaman 383-411. 1999.

Evans, D. J. "ANew 4th Order Runge-Kutta Method For Initial Value Problems With Error Control". *Intern J. Computer Math*.Vol. 39. Halaman 217-227. 1991.

Evans, D. J. dan Yaakub A.R. "A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Contra-Harmonic Mean". *Intern J. Computer Math*.Vol. 57. Halaman 249-256. 1995.

Evans, D. J. dan Yaakub A.R. "A Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Heronian Mean Formula". *Intern J. Computer Math*.Vol. 58. Halaman 103-115. 1995.

Herdiana, H. dkk. *Persamaan Diferensial*. Pustaka Setia. Bandung. 2001.

Lambert, J. D. *Numerical Methods for Ordinay Differential System The Initial Value*. John Wiley & Sons. New York.1993.

Lapidus, L dan John H. S. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equation*. Academic Press. New York. 1971.

Leithol, L. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik.* Edisi Kelima. Erlangga. Jakarta. 1993.

Martono, K. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta. 1999.

Munir, R. *Metode Numerik*. Edisi Revisi. Informatika. Bandung. 2008.

Roni. ”Modifikasi Metode Runge-Kutta orde Empat (Kutta) Berdasarkan Rata-rata Geometri”. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2011.

Sanugi, B. B. dan D. J. Evans. ”A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean”. *Intern J. Computer Math*.Vol. 50. Halaman 113-118. 1994.

Spiegel, M. R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. Mc Graww-Hill Book Company. New York. 1968.

Supinah. ”Modifikasi Metode Runge-Kutta orde Empat (Kutta) Berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik”. *Tugas akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2010.

Wazwaz. ”A Comparison of Modified Runge-Kutta Formulas Based on Variety of Means”. *Intern J. Computer Math*.Vol. 50. Halaman 105-112. 1994.